数理解析研究所講究録
564巻 1985年 1-21

機械故障を考慮したトランスファー・ラインの最適制御

甲南大 理　大野勝久 (Katsuhisa Ohno)
京大 工　村瀬 薫 (Kaoru Murase)
京大 工　三根 久 (Hisashi Mine)

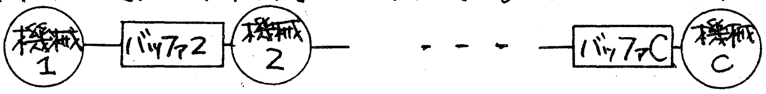
1. はじめに

近年、トランスファー・ラインの最適設計、及び最適制御問題に対する関心が増大している。トランスファー・ラインは直列に並んだ機械と機械間に置かれたバッファからなり、ラインの動きは同期している。このようなトランスファー・ライン・モデルは、生産工程、計算機、及び通信システムにおいて重要な役割を果している。

トランスファー・ラインの最適設計、すなわち最適な機械の順、バッファ配置に関しては多くの研究がなされて来た。Lev and Toof [4]は、バッファの数が1つ又は2つの場合に、最適なバッファ配置を論じた。Gershwin and Schick [3]は、2, 3段のトランスファー・ラインの動的な振舞いをマルコフ連鎖として定式化し、連鎖の定常状態確率を求めるアルゴリズ

ムを導いた。Shanthikumar and Tien [7]は、機械の故障時に仕掛り品の廃棄を考慮したシステムに対して、同様のアルゴリズムを導いた。トランスファー・ラインに関する過去の研究は、上記のものを含め、生産率や平均在庫レベルなどのシステムの性能評価規準と、機械の故障率と修復率、バッファの容量と配置などのシステムパラメータとの関係の解析に焦点があてられていた。(Buzacott and Hanifin [1])

システムの性能はその制御政策によっても影響を受けるが、トランスファー・ラインの最適制御政策について論じたものは数少い。Buzacott [2]は、2段のシステムに対して、故意に機械を停止させない政策がシステムの生産率を最大化することを示した。しかしながら、実際の多段システムに対する最適制御政策を解析的に求めることは困難である。このように、実際のシステムに対して期待利得を最大にするような最適制御政策を求める効率の良いアルゴリズムの開発が望まれるものである。(大野 [5]) さらに、この最適制御のもとでの最適設計は実際問題として重要な問題であろう。本報告では、C段トランスファー・ラインの最適制御問題をマルコフ決定過程として定式化し、その最適定常政策を求める修正政策反復法(大野[6])によるアルゴリズムを提案する。



2. C段トランスファー・ラインの最適制御

機械の故障を考慮した有限容量バッファをもつC段トランスファー・ラインを考える。システムは、図のように直列に置かれたC個の機械と各機械間に置かれたバッファからなる。仕掛り品はシステムの外から最初の機械に入り処理される。その後仕掛り品は機械iからバッファ$i+1$へそして機械$i+1$へと移動し、最後の機械Cで処理されてシステム外へ去る。バッファは機械の故障がラインに及ぼす影響を軽減する目的で設けられている。バッファがなければ、一台の機械が故障するやいなや、すべての上流の機械が停止する。

i番目のバッファの容量をN_i $(i=2,\cdots,c)$とする。ある機械によって処理された仕掛り品が次のバッファが満杯のため送られることができずその機械を占拠したとき、その機械はブロックされた(blocked)という。また、ある機械がその直前のバッファに仕掛り品がなく品切れで処理ができないとき、その機械はスターブされた(starved)という。機械のサービスレベルは通常、停止と稼動の0と1が考えられているが、本報告ではこれを一般化し、整数値をとるものとする。例えば、機械iがブロック(スターブ)されているとき、機械$i+1$ $(i-1)$のサービスレベルを上げる方が望ましく、機械$i-1$ $(i+1)$のサービスレベルは下げる方がよかろう。機械iのサービスレベルは

集合$\{0,1,\cdots,K_i\}$の中から動的に選ばれ、レベルkで稼動中の機械は1期にk個の仕掛り品を処理するものとする。レベル0の機械は休止中であるといい、レベル$k>0$で処理中の機械は稼動中であるという。

この最適制御問題を定式化するにあたり次の仮定をおく。

(i) ラインは同期している。すなわち、すべての機械は等しく一定の処理時間をもち、同時にその処理を開始する。

(ii) 機械は仕掛り品を処理中にのみ故障する。機械の故障は幾何分布に従う。すなわち、レベルkで稼動中の機械iがその期に故障する確率は$p_i(k)$である。この機械が故障したときk個の未処理の仕掛り品を機械内に保持するものとする。

(iii) 機械の修理は幾何分布に従う。すなわち、レベルkの機械iがその期に修理される確率は$r_i(k)$である。この機械が修復されれば、機械内のk個の仕掛り品の処理を開始する。

(iv) 最初の機械は尽きることなく材料の供給を受け、最後の機械の下流には無限容量の出力バッファがある。すなわち、機械1は決してスターブされず、機械Cは決してブロックされない。

(V) 期の始めにシステムの状態を見て、機械のサービスレベルが選択され、それに応じて各仕掛り品が次のバッファ又は機械へ移される。仕掛り品の移動後に、故障中又はブロックされ

ている機械のサービスレベルは変更できないものとする。

(vi) その直後(直前)のバッファにk個未満の空き(仕掛り品)しかないとき、処理を終えた(開始する)レベルkの機械は、k個(0個)の仕掛り品を保持したままブロック(スターブ)される。

このトランスファー・ライン制御問題の費用構造としては以下のものを考える。

(i) 在庫費用 $h_i(l)$ 、(l個の仕掛り品を1期、バッファi内に保持する費用)

(ii) 稼動費用 $b_i(k)$ (機械iをレベルkで1期稼動する費用)

(iii) 休止、スターブ費用 $d_i(k)$ (機械iをレベルkで1期休止、スターブする費用)

(iv) ブロック費用 $c_i(k)$ (レベルkの機械iを1期ブロックする費用)

(v) 切り換え費用 $e_i(k, k')$ (機械iのサービスレベルをkからk'に切り換える費用)

(vi) 故障費用 $f_i(k)$ (レベルkの機械iの故障修理に要する1期当りの費用)

(vii) 利得 g (1つの製品を完成して得られる利得)

問題は、一期当りの期待利得を最大にする最適制御政策を求めることである。この問題は、次節でマルコフ決定過程として定式化される。

3、時間平均マルコフ決定過程

X_i ($i=2,\cdots,c$ $X_i=0,1,\cdots N_i$) をバッファ i 内の仕掛り品の数とする。Y_i と Z_i ($i=1,\cdots c$) をそれぞれ次のように定義する。

$Y_i=k$ 機械 i のサービスレベルが k ($k=0,1,\cdots,K_i$)

$$Z_i=\begin{cases} -1 & \text{機械}\,i\,\text{が故障中} \\ 0 & 〃\quad \text{休止中、又はスターブされている} \\ 1 & 〃\quad \text{稼動中} \\ 2 & 〃\quad \text{ブロックされている} \end{cases}$$

このとき、システムの状態 s は次のように $3C-1$ 次元ベクトルによって表わされる。

$$s=(X_2,\cdots,X_c,Y_1,\cdots,Y_c,Z_1,\cdots,Z_c)$$

S を可能な状態の集合とする。期の始めにシステムが状態 s にあれば、決定 a が許容決定の集合 $A(s)$ の中から選ばれる。決定は、機械 i の当期のサービスレベルを Y_i' とすれば

$$a=(Y_1',\cdots,Y_c')$$

で表わされる。

状態 $s=(X_2,\cdots,X_c,Y_1,\cdots,Y_c,Z_1,\cdots Z_c)$ で決定 $a=(Y_1',\cdots,Y_c')$ がとられると、s と a に応じて仕掛り品の移動が行なわれ、システムの状態は、中間状態 $s'=(X_2',\cdots X_c',Y_1',\cdots,Y_c',Z_1',\cdots Z_c')$ に遷移する。ここで X_i', Z_i' ($i=1,\cdots C$) は、補助変数 t_i ($i=2,\cdots,c+1$) を用いて次のアルゴリズムによって逐次決定される変数であ

る。

1. $t_{c+1}=-1 \quad (Z_c=-1), \quad =1 \quad (Z_c=0 \text{ or } 1)$ とおく.

2. $Z_i',\ t_i,\ X_i'$ を $i=c,\cdots,2$ に対して逐次求める。

$$Z_i'=\begin{cases}-1 & (t_{i+1}=-1)\\ 0 & (t_{i+1}=1 \text{ かつ } (\gamma(Z_{i-1})Y_{i-1}+X_i<Y_i' \text{ 又は } Y_i'=0))\\ 1 & (t_{i+1}=1 \text{ かつ } \gamma(Z_{i-1})Y_{i-1}+X_i\geq Y_i')\\ 2 & (t_{i+1}=2)\end{cases}$$

$$t_i=\begin{cases}-1 & (Z_{i-1}=-1)\\ 1 & (Z_{i-1}=0 \text{ 又は } \gamma(Z_{i-1})Y_{i-1}+X_i-\delta(Z_i')Y_i'\leq N_i)\\ 2 & (Z_{i-1}=1,2 \text{ かつ } Y_{i-1}+X_i-\delta(Z_i')Y_i'>N_i)\end{cases}$$

$$X_i'=\begin{cases}\gamma(Z_{i-1})Y_{i-1}+X_i-\delta(Z_i')Y_i' & (t_i=1)\\ X_i-\delta(Z_i')Y_i' & (t_i=-1,2)\end{cases}$$

ここで $\delta(Z)=1 \quad (Z=1), \quad =0 \quad (Z\neq 1)$

$\gamma(Z)=1 \quad (Z=1,2), \quad =0 \quad (Z\neq 1,2)$

である。

3. $$Z_1'=\begin{cases}-1 & (t_2=-1)\\ 0 & (t_2=1 \text{ かつ } Y_1'=0)\\ 1 & (t_2=1 \text{ かつ } Y_1'>0)\\ 2 & (t_2=2)\end{cases}$$

このアルゴリズムを用いれば、状態sで決定aが許容されるか否かも定められる。すなわち、許容される決定aは、

$t_{i+1}=-1, 2$ となるすべての i に対して $Y_i'=Y_i$ を満たす。レベル Y_i' をもつ機械 i の状態が、中間状態 から次期の始めの状態 Z_i'' に遷移する確率を $q_i(Z_i', Y_i', Z_i'')$ で表わすことにする

$$
q_i(Z_i', Y_i', Z_i'') = \begin{cases} 1 & (Z_i'=Z_i''=0 \text{ 又は } Z_i'=Z_i''=2) \\ p_i(Y_i') & (Z_i'=1 \text{ かつ } Z_i''=-1) \\ 1-p_i(Y_i') & (Z_i'=Z_i''=1) \\ r_i(Y_i') & (Z_i'=-1 \text{ かつ } Z_i''=1) \\ 1-r_i(Y_i') & (Z_i'=Z_i''=-1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

となる。したがって、状態 $s=(X_2, \cdots, X_c, Y_1, \cdots, Y_c, Z_1, \cdots, Z_c)$ で決定 $a=(Y_1', \cdots, Y_c')$ をとったとき、次期の始めに $s''=(X_2'', \cdots X_c'', Y_1'', \cdots, Y_c'', Z_1'', \cdots Z_c'')$ に遷移する確率 $p(s, a, s'')$ は、

$$
p(s, a, s'') = \prod_{i=1}^{c} q_i(Z_i', Y_i', Z_i'') \qquad (1)
$$

で与えられる。集合 I_j $(j=-1, 0, 1, 2)$ を $I_j=\{i ; Z_i'=j\}$ で定義する。状態 s で決定 a をとったとき、一期当りの期待利得 $r(s, a)$ は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
r(s, a) = & \{\delta(Z_c')(1-p_c(Y_c')) + \delta(Z_c'+2) r_c(Y_c')\} q Y_c' \\
& - \sum_{i \in I_{-1}} \{(1-r_i(Y_i')) f_i(Y_i') + r_i(Y_i') b_i(Y_i')\} - \sum_{i \in I_0} d_i(Y_i') \\
& - \sum_{i \in I_1} \{(1-p_i(Y_i')) b_i(Y_i') + p_i(Y_i') f_i(Y_i')\} - \sum_{i \in I_2} c_i(Y_i') \\
& - \sum_{i=1}^{c} h_i(X_i') - \sum_{i=1}^{c} e_i(Y_i, Y_i') \qquad (2)
\end{aligned}
$$

以上により、C 段トランスファー・ラインの最適制御問題は

次の最適方程式を解くマルコフ決定過程として定式化される。

$$g_s^* = \max_{a \in A(s)} \sum_{s'' \in S} p(s, a, s'') g_{s''}^*$$

$$g_s^* + v_s^* = \max_{a \in L(s)} \left\{ r(s, a) + \sum_{s'' \in S} p(s, a, s'') v_{s''}^* \right\}$$

ここに $L(s) = \{ a \in A(s) ;\ \sum_{s'' \in S} p(s, a, s'') g_s^*$ を最大にする $a \}$

ゲインg_s^*は、状態sから始めたときの一期当りの最大利得を表わしている。S及び$A(s)$ $(s \in S)$は有限であるから，状態sにおいて上式右辺を最大にする決定をとる政策f^*が求める最適定常政策である。

4、修正政策反復法

マルコフ決定過程をとく標準的な手法はは政策反復法(PIM)である。PIMは政策改良と値決定のルーチンからなり、時間平均問題に対するPIMの収束は多重連鎖における相対値ベクトルの選択に依存する。現在までに提案されたPIMで最も進んだものがSpreen[1981]による政策反復アルゴリズム(PIA)である。しかし、このPIAにおいても少くとも状態数$|S|=M$の次元の連立一次方程式を解かねばならず，Mが大きくなると容易ではない。このような多状態問題に適した手法として修正政策反復法(MPIM) 知られている。MPIMはPIMの値決定ルーチンにおいて有限回の逐次近似を用いる手法である。

前節で示したように、C段トランスファー・ラインの状態sは3C−1次元のベクトルで表現される。しかし、Cが大きい

ときに、このような表現を用いることは適切ではなく、またsのすべての組み合せが必ずしも可能な状態を表わすわけではないので、記憶領域がむだに使われる。状態sが可能か否かは、次の条件を用いて容易に調べられる。

$Z_i=-1$ ならば $Y_i>0$

$Z_i=0$ ならば $Y_i=0$ 又は $X_i<Y_i$

$Z_i=1$ ならば $Y_i=0$

$Z_i=2$ ならば $Y_i>0$ かつ $N_{i+1}-X_{i+1}<Y_i$ (4)

この条件をみたす状態$s=(X_2,\cdots,X_c,Y_1,\cdots,Y_c,Z_1,\cdots,Z_c)$は可能な状態である。そこで、可能な状態を順序づけ、配列$T(j)$を

$$T(j)=t(s)$$

と定義する。ここでsはj番目の可能な状態であり、tはその逆関数が容易に求められる整数値関数である。例えば、$s=(X_2,\cdots,X_c,Y_1,\cdots,Y_c,Z_1,\cdots,Z_c)$に対して

$$\begin{aligned}t(s)&=(Z_c+1)+4(Z_{c-1}+1)+\cdots+4^{c-1}(Z_1+1)\\&\quad+4^cY_c+4^cK_c'Y_{c-1}+\cdots+4^cK_c'\cdots K_2'Y_1\\&\quad+4^cK_c'\cdots K_1'X_c+4^cK_c'\cdots K_1'N_c'X_{c-1}+\cdots 4^cK_c'\cdots K_1'N_c'\cdots N_3'X_2\end{aligned}$$

である。ここでK_i' $(i=1,\cdots,c)$, N_i' $(i=3,\cdots,c)$はそれぞれK_i, N_iより大きい最小の2の巾である。この逆関数はmodulo演算により容易に求められる。決定$a=(Y_1',\cdots,Y_c')$に対しても、tと同様な整数値関数$u(a)$を用いることにする。すなわち、

$k = u(a)$である。以下のMPIMでは次の2つのタイプの非最適決定の除去法を用いている。

i) 最適政策f_j^*になりえない決定kを除去する永久的除去法.

ii) 反復nの政策改良ルーチンで得られる政策f_j^{n+1}になりえない決定kを除去する一時的除去法.

配列$A(j,k)$は上記除去法の結果を格納するために使用される。

$A(j,k) = -1$, kはjで許容されないか、または永久的除去法により非最適と判定された.

$= 0$, kは反復$n-1$で一時的除去法により除去されなかったか、又は$k = f_j^n$である.

$= n-r$, kは反復$n-1$の一時的除去法により除去され、かつkが最後に評価されたのは反復$r \geq n-R$である。

$= R+1$, kは反復$n-1$の一時的除去法により除去され、かつkが最後に評価されたのは反復$r < n-R$である。

さらに

$A(j) = \{k; A(j,k) = 0\}$

とおく。

修正政策反復アルゴリズム(MPIA)

1. $j=0$ とおく。s のすべての組み合せについて次の手続きを実行する。s が可能であるかどうかを条件(4)を用いて調べる。もし s が可能であれば $T(j)=t(s)$ とおき、さらに a のすべての組み合せに対し、a が許容されるか否かを調べ、

$$
\begin{aligned}
A(j,k) &= 0 \quad , s \text{ で } k=u(a) \text{ が許容される} \\
&= -1 \quad , \quad 〃 \quad \text{許容されない}
\end{aligned}
$$

とおく。$j=j+1$ とする。

2、式(1),(2)から、$P_{jj'}(k)$ と $r_j(k)$, $j,j'=1,\cdots,M$, $k\in A(j)$ を計算する。

$$P_{jj'}(k) = p(t^{-1}(T(j)), u^{-1}(k), t^{-1}(T(j')))$$

$$r_j(k) = r(t^{-1}(T(j)), u^{-1}(k))$$

非負整数 m、適当な非負定数 ε と δ、初期政策 f^0, $f_j^0\in A(j)$ を選ぶ。$v_j^{-1}=v_j^0=w_j^0=0$ $(j=1,\cdots,M)$, $z=M$, $n=0$, $\phi_0=0$, $B=L$ とおく。ここで L は十分大きな数である。

$V(j,k)=L$ $(j=1,\cdots,M,\ k\in A(j))$, $w_j^{m+1}=L_j(f_j^0, w^m)$ $(j=1,\cdots,M)$ とする。ここで $L_j(k,w^m)$ は

$$L_j(k,w^m) = r_j(k) + \sum_{j'=1}^{M} P_{jj'}(k)\, w_{j'}^m$$

で与えられる。

3. $\phi_{n,r}$ $(\max\{-1, n-R\} \le r \le n-2)$, ϕ_n を次式により計算する。

$\Phi_{n,r} = \max_j \{ v_j^n - v_j^r \}$, $\Phi_n = \max_j \{ v_j^n - v_j^{n-1} \}$

$j=1,\cdots,M$ に対して、$u = w_j^{m+1} - w_z^m$, $f = f_j^n$, $V(j,f) = u$ とおき、$A(j,k)$ であるような $k (\neq f_j^n)$ に対し次のサブステップの1つを実行する。

a) $A(j,k) = 0$ 又は 1 のとき, $t = V(j,k) + \Phi_n - P_{jj}(k) \{ \Phi_n - (v_j^n - v_j^{n-1}) \}$
$t < u$ ならば, $A(j,k) = 2$。そうでなければ $v = L_j(k, v^n)$,
$V(j,k) = v$ とし $v > u$ ならば, $u = v$, $f = k$.

b) $A(j,k) = n - r \ (< R)$ のとき, $t = V(j,k) + \Phi_{n,r} - P_{jj}(k) \{ \Phi_{n,r} - (v_j^n - v_j^r) \}$
$t < u$ ならば、$A(j,k) = A(j,k) + 1$。そうでなければ、$v = L_j(k, v^n)$,
$V(j,k) = v$, $A(j,k) = 1$, $v > u$ ならば、$u = v$, $f = k$,

c) $A(j,k) = R$ のとき、$t = V(j,k) + \Phi_{n,n-R} - P_{jj}(k) \{ \Phi_{n,n-R} - (v_j^n - v_j^{n-R}) \}$
$t < u$ ならば、$A(j,k) = R + 1$。そうでなければ、$v = L_j(k, v^n)$,
$V(j,k) = v$, $A(j,k) = 1$, $v > u$ ならば、$u = v$, $f = k$.

d) $A(j,k) = R + 1$ のとき、$t = V(j,k) + \Phi_n - P_{jj}(k) \{ \Phi_n - (v_j^n - v_j^{n-1}) \}$
$t < u$ ならば、$V(j,k) = t$ 。そうでなければ、$v = L_j(k, v^n)$,
$V(j,k) = v$, $A(j,k) = 1$, $v > u$ ならば、$u = v$, $f = k$

すべての k について上のサブステップを終えたあと、
$x_j^{n+1} = u - v_j^n$, $f_j^{n+1} = f$, $A(j,k) = 0$
すべての j について上のルーチンを終えたあと、
$\sum_{j=1}^{M} \# \{ k ; A(j,k) = 0 \} = M$ ならば、CB=true, そうでなければ、
CB=false とする。ここで $\# \{ \cdot \}$ は集合 $\{ \cdot \}$ の要素の数を

表わすものとする。5へ行く.

4. $j=1,\cdots,M$ に対して, $u=w_j^{m+1}-w_j^m$, $f=f^n$ とおき,
$A(j,k)\geq 0$ であるような $k\ (\neq f_j^n)$ に対して $v=L_j(k,v^n)$ し,
次のサブステップの1つを実行する.

a) $v>u$ ならば, $u=v$, $f=k$, $A(j,k)=0$, $V(j,k)=v$.

b) $u\geq v>v_j^n+g_j^{m+1}$ ならば, $A(j,k)=0$, $V(j,k)=v$.

c) $v<v_j^n+g_j^{m+1}-B$ ならば, $A(j,k)=-1$

d) $v_j^n+g_j^{m+1}\geq v\geq v_j^n+g_j^{m+1}-B$ ならば, $d=1-\sum_{j'=1}^{M}\min(P_{jj'}(k),$
$P_{jj'}(f_j^n))$ を計算し, $v<v_j^n+g_j^{m+1}-dB$ ならば, $A(j,k)=-1$.
そうでなければ, $A(j,k)=0$, $V(j,k)=v$

すべての k について上のサブステップを終えたあと
$x_j^{m+1}=u-v_j^n$, $f^{m+1}=f$.

すべての j について上のルーチンを終えたあと
$f^{n+1}\neq f^n$ ならば, $B=L$, $CB=\mathrm{false}$ とし.
$\sum_{j=1}^{M}\#\{k;A(j,k)=0\}=M$ ならば 9 へ行く.

5. $\Delta_{m+1}=\max_j x_j^{m+1}$, $\nabla_{m+1}=\min_j x_j^{n+1}$, $z=\arg\{\min_j x_j^{n+1}\}$ とし.
$\Delta_{m+1}-\nabla_{m+1}<\varepsilon$ ならば 10へ行く.

6. $w^0=v^n+x^{m+1}$, $g^0=x^{n+1}$ とおき, $l=0,1,\cdots,m$ に対して,
逐次, $w^{l+1}=r(f)+P(f)w^l$, $g^{l+1}=w^{l+1}-w^l$ を計算する.
ここで $r(f)=(r_j(f_j))$, $P(f)=(P_{jj'}(f_j))$ である。
$v^{n+1}=w^m-w_z^m e$, $\Delta=\max_j g_j^{m+1}$, $\nabla=\min_j g_j^{m+1}$ とおく。

ここでeはすべての成分が1である3M次元列ベクトルである。

7. CB=falseならば、$n=n+1$とし 3へ行く

8. 次のサブステップにより上限Bを求める.

a) $|a_{n+1}-a_n|<\delta$ かつ $a_{n+1}<1$ ならば、

$$B=(\max_j g_j^{n+1}-\min_j g_j^{n+1})/(1-a_{n+1})$$

ここで $a_\ell=(\max_j g_j^\ell-\min_j g_j^\ell)/(\max_j g_j^{\ell-1}-\min_j g_j^{\ell-1})$

b) $|b_{n+1}-b_n|<\delta$ かつ $b_{n+1}<1$ ならば、

$$B=\max\{\max_j g_j^{n+1}-\min_j g_j^{n+1},\ b_{n+1}(\max_j g_j^n-\min_j g_j^n)\}/(1-b_{n+1})$$

ここで $b_\ell=\sqrt{(\max_j g_j^\ell-\min_j g_j^\ell)/(\max_j g_j^{\ell-2}-\min_j g_j^{\ell-2})}$

そうでなければ CB=false, $n=n+1$とし 3へ行く.

$n=n+1$とし、$B<\Gamma$ ならば 4へ そうでなければ 3へ行く。

9、政策f^{n+1}は、唯一最適な政策f^*である。ゲインg^*と相対値$v(f^*)$はそれぞれ $g^*=(\Delta+\nabla)/2$, $v_j(f^*)=w_j^{n+1}-w_M^{n+1}$ で近似され、誤差の上限はそれぞれ$(\Delta-\nabla)/2$, Bである。

10、政策f^{n+1}は $0\le g^*-g_j(f^{n+1})\le\varepsilon$ を満たすε最適な政策である。ゲインg^*と相対値$v(f^*)$はそれぞれ $g^*=(\Delta_{n+1}+\nabla_{n+1})/2$ $v_j(f^*)=x_j^{n+1}+v_j^n-(x_M^{n+1}+v_M^n)$ で近似される。

MPIAは、有限回の反復で唯一最適、又はε-最適な政策を

決定する。さらに問題が唯一最適な政策 f^* をもてば、$\varepsilon=0$ としたMPIAは f^* を有限回の反復で決定することが示される。

5、数値結果

1) 3段トランスファー・ラインの最適制御問題

a) バッファなしの場合（$M=72$, $K=\sum_{s\in S} A(s)=277$）

パラメータの値は以下のものとする。

$C=3$、$N_2=N_3=0$, $K_1=K_2=K_3=1$, $b_1(1)=b_2(1)=b_3(1)=4$,

$d_1(k)=d_2(k)=d_3(k)=2k$ $(k=0,1)$, $c_1(1)=c_2(1)=c_3(1)=7$,

$e_1(k,k')=e_2(k,k')=e_3(k,k')=|k-k'|$ $(k,k'=0,1)$

$f_1(1)=f_2(1)=f_3(1)=15$, $g=30$, $p_i(1)=0.002i$ $(i=1,2,3)$

$r_i(1)=0.6-0.1i$ $(i=1,2,3)$

b) バッファ1個の場合 I（$M=117$, $K=474$）

$N_2=1$, $h_2(l)=2l$ $(l=0,1)$。他のパラメータの値はa)と同じである。

c) バッファ1個の場合 II（$M=117$, $K=512$）

$N_3=1$, $h_3(l)=2l$ $(l=0,1)$ 他のパラメータの値はa)と同じである。

d) バッファ2個の場合（$M=189$, $K=806$）

$N_2=N_3=1$, $h_2(l)=h_3(l)=2l$ $(l=0,1)$ 他のパラメータの値はa)と同じである。

a)〜d)に対して3つの機械順を変えて計算を行なった。機

械A,B,Cの特性値が表1に、数値計算の結果が表2に示されている。

2) 4段トランスファー・ラインの最適制御問題

e) バッファなしの場合 ($M=345, K=2019$)

$C=4$, $N_4=0$, $K_4=1$, $b_4(1)=4$, $d_4(1)=2k$ ($k=0,1$), $c_4(1)=7$, $e_4(k,k')=|k-k'|$ ($k,k'=0,1$), $f_4(1)=15$, $g=30$, $p_4(1)=0.008$, $r_4(1)=0.2$、他のパラメータの値は 1)-a) と同じである。

f) バッファ1個の場合 I ($M=561, K=3456$)

$N_2=1$, $h_2(l)=2l$ ($l=0,1$), 他のパラメータの値は e) と同じである。

g) バッファ1個の場合 II ($M=570, K=3512$)

$N_3=1$, $h_3(l)=2l$ ($l=0,1$), 他のパラメータの値は e) と同じである。

h) バッファ1個の場合 III ($M=561, K=3454$)

$N_4=1$, $h_4(l)=2l$ ($l=0,1$), 他のパラメータの値は e) と同じである。

e)〜h) に対しては、2通りの機械順 ABCD, DCBA について計算を行なった。計算結果は表3に示されている。

1) は PIA と MPIA の両アルゴリズムを用いて、2) は、MPIA を用いて解いた。また a)〜h) に対し、制御を行なわずに常に

機械を動したとき(no control)のゲインと生産率も計算した。

よく知られているように、生産率に関しては、システムの可逆性が成り立っている。しかし、各種費用を考慮した本稿の問題のゲインに関しては、当然ではあるが可逆性は成立せず、良い機械を後部におき、バッファをラインの中央におくことが有利であることがわかる。この結果は、一般に知られている経験則にも合致する。さらに、生産率に関しては可逆性の成立するABC(D),(D)CBAのシステムが、それぞれ最小及び最大のゲインを与えることは興味深いものである。また、すべての例において、最適制御を用いたときのゲインは制御をしないときのそれよりかなり改善されている。さらに、最適制御を用いたときはバッファをつけることによってゲインが改善されるが、制御しない場合は在庫費用のためバッファをつけることによりむしろゲインが低下している。以上から、実際のトランスファー・ラインでは、各種費用を考慮して最適制御を行い、そのもとで最適設計を考えることが望ましいといえよう。

参考文献

[1] Buzacott, J.A. and Hanifin, L.E. [1978] "Models of Automatic Transfer Lines with Inventory Banks - A Review and Comparison," AIIE Trans. 10, 197-207.

[2] Buzacott, J.A. [1982] "Optimal Operating Rules for Automated Manufacturing Systems," IEEE Trans, Automat. Contr. AC-27, 80-86.

[3] Gershwin, S.B. and Schick, I.C. [1983] "Modeling and Analisis of Three-Stage Transfer Lines with Unreliable Machines and Finite Buffers," Opns. Res. 31, 354-380.

[4] Lev, B. and Toof, D.I. [1980] "The Role of Internal Storage Capacity in Fixed Cycle Production Scheduling," Nav. Res. Log. Quart. 27, 477-487.

[5] 大野勝久 [1982] "待ち行列システムの最適制御に関する計算アルゴリズムについて" 数理解析研究所講究録 452, 1-19.

[6] Ohno, K. [1984] "Modified Policy Iteration Algorithm with Nonoptimality Test for Undiscounted Markov Decision Processes," Working paper.

[7] Shanthikumar, J.G. and Tien, C.C. [1983] "An Algorithmic Solution to Two-Stage Transfer Lines with Possible Scrapping of Units," Mgnt. Sci. 29, 1069-1086.

[8] Spreen, D. [1981] "A Futher Anticyclig Rules in Multichain Policy Iteration for Undiscounted Markov Renewal Programs," Z. Opns. Res. 25, 225-233.

表 1

機械	故障率	修復率
A	0.002	0.5
B	0.004	0.4
C	0.006	0.3
D	0.008	0.2

表 2

場合	機械の順	制御をしない	最適制御		
				計算時間ms(反復回数)	
		ゲイン(生産率)	ゲイン	PIA	MPIA
a)	A,B,C	13.54 (0.9672)	13.59	1294(3)	183(7)
	A,C,B	13.59 (0.9672)	13.67	1303(3)	163(7)
	B,A,C	13.57 (0.9672)	13.64	1278(3)	160(7)
	B,C,A	13.65 (0.9672)	13.75	1144(3)	172(7)
	C,A,B	13.67 (0.9672)	13.78	1299(3)	195(8)
	C,B,A	13.70 (0.9672)	13.83	952(3)	195(8)
b)	A,B,C	11.92 (0.9688)	13.76	5267(4)	559(10)
	A,C,B	11.97 (0.9688)	13.83	5409(4)	546(10)
	B,A,C	12.31 (0.9697)	13.77	5392(4)	540(10)
	B,C,A	12.39 (0.9697)	13.89	5412(4)	540(10)
	C,A,B	12.76 (0.9701)	13.86	5448(4)	493(10)
	C,B,A	12.79 (0.9700)	13.90	5429(4)	553(9)
c)	A,B,C	12.63 (0.9700)	13.72	4768(3)	442(8)
	A,C,B	13.01 (0.9697)	13.73	4792(3)	427(8)
	B,A,C	12.66 (0.9701)	13.77	4891(3)	442(8)
	B,C,A	13.38 (0.9688)	13.78	4215(3)	372(7)
	C,A,B	13.09 (0.9697)	13.85	4905(3)	377(7)
	C,B,A	13.42 (0.9688)	13.86	4816(3)	365(7)
d)	A,B,C	10.95 (0.9713)	13.87	25983(4)	1188(7)
	A,C,B	11.37 (0.9711)	13.89	25739(4)	1400(8)
	B,A,C	11.34 (0.9721)	13.88	25754(4)	1201(7)
	B,C,A	12.12 (0.9711)	13.91	25707(4)	1341(8)
	C,A,B	12.21 (0.9721)	13.92	25851(4)	1362(8)
	C,B,A	12.55 (0.9713)	13.93	25717(4)	1206(7)

表3

場合	機械の順	制御をしない	最適制御	
		ゲイン(生産率)	ゲイン	計算時間ms(反復)
e)	A,B,C,D	6.808 (0.9314)	6.942	26486(8)
	D,C,B,A	7.357 (0.9314)	7.746	26223(8)
f)	A,B,C,D	5.309 (0.9415)	7.229	113872(10)
	D,C,B,A	6.294 (0.9357)	7.924	107588(8)
g)	A,B,C,D	5.500 (0.9351)	7.339	109030(8)
	D,C,B,A	6.894 (0.9351)	7.869	92211(7)
h)	A,B,C,D	6.137 (0.9357)	7.252	76279(8)
	D,C,B,A	7.223 (0.9415)	7.794	85318(7)

注) MPIAのステップ3，4において，$P_{jj}(k)$はメモリーにストアせず，必要に応じてその都度式(1)から計算された。